

## BAB II

### KAJIAN TEORI

#### A. Graf

Menurut catatan sejarah, permasalahan pertama yang menggunakan teori graf sebagai bahan kajian adalah permasalahan terkait Jembatan Konisberg yang dikaji oleh ahli matematika dan fisika pionir bernama Leonhard Euler yang berasal dari Swiss (Carlson, 2017). Buku rilisan tahun 1740 oleh Leonhard Euler yang membahas tentang pemecahan masalah Jembatan Konisberg ini terkenal dengan judul *Solutio Problematis Ad Geometriam Situs Partinentis*. Teori graf berkembang cukup pesat karena memiliki daya tarik tersendiri yakni teori yang memiliki penerapan yang sangat luas, mulai dari ilmu komputer, kimia, fisika, biologi, linguistik, manajemen, hingga pemecahan teka-teki dan permainan asah otak (Saldi, 2017).

#### **Definisi Graf:**

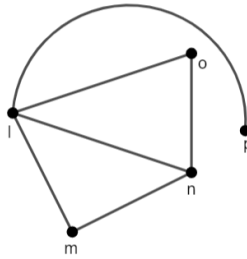
*Graf  $G$  adalah pasangan himpunan  $(V, E)$  yang dapat ditulis dengan notasi  $G = (V, E)$  dimana  $V$  merupakan himpunan berhingga dari simpul-simpul (Vertices atau node), dan  $E$  merupakan himpunan sisi (edge atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul (Chartrand & Zhang, 2008).*

Berdasarkan definisi, dapat dikatakan bahwa sebuah graf harus memiliki sebuah simpul dan tidak harus memiliki sebuah sisi. Graf yang hanya mempunyai satu buah simpul tanpa adanya sisi tersebut disebut graf trivial.

Simpul pada graf dapat dinomori dengan menggunakan huruf  $a, b, c, d, \dots$ , dengan bilangan asli  $1, 2, 3, \dots$ , atau gabungan keduanya. Sementara sisi yang menghubungkan simpul satu dengan simpul yang lainnya dinyatakan sebagai pasangan. Contoh: Misalkan diberikan himpunan simpul yang terdiri dari  $\{l, m, n, o, p\}$  dan sisi yang terdiri dari pasangan himpunan  $\{(l, m), (l, n), (l, o), (l, p), (m, n), (n, o)\}$ . Maka graf  $G$  dapat dinyatakan pada

**Gambar 2.1.**

**Gambar 2. 1 Graf**



(Sumber: Dokumen Penulis)

Jika  $\overline{lm}$  adalah sisi dari graf  $G$  yang dinotasikan dengan  $E = (l, m)$  maka dapat dikatakan bahwa titik  $l$  dan titik  $m$  terhubung secara langsung (*adjacent*). Kemudian apabila diberikan sisi yang berbeda yakni sisi  $\overline{ln}$  pada graf  $G$  maka titik  $l$  dapat dikatakan bertetangga dengan titik  $m$  dan  $n$ . Artinya, titik  $l$  dan sisi  $\overline{lm}$  bersisian satu sama lain, begitu pula titik  $n$  dan sisi  $\overline{ln}$ . Contoh dapat dilihat pada **Gambar 2.1.**:

Diberikan suatu graf  $G$  dengan

$$V = \{p, q, r, s\}$$

$$E = \{(p, s), (s, q), (s, r), (q, r)\}$$

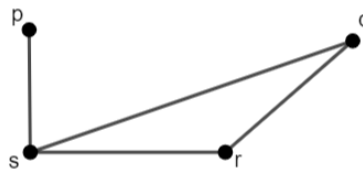
Dengan demikian, dapat dikatakan:

titik  $s$  bertetangga dengan titik  $p, q$ , dan  $r$

titik  $q$  bertetangga dengan titik  $s$  dan  $r$

titik  $r$  bertetangga dengan titik  $s$  dan  $q$

**Gambar 2. 2 Graf Simpul Bertetangga**



(Sumber: Dokumen Penulis)

### **Definisi Subgraf:**

*Misalkan suatu Graf  $G$  memiliki sebuah subgraf yakni graf  $H$  apabila titik di  $H$  adalah titik di  $G$  dengan sisi pada  $H$  juga merupakan sisi pada  $G$ .*

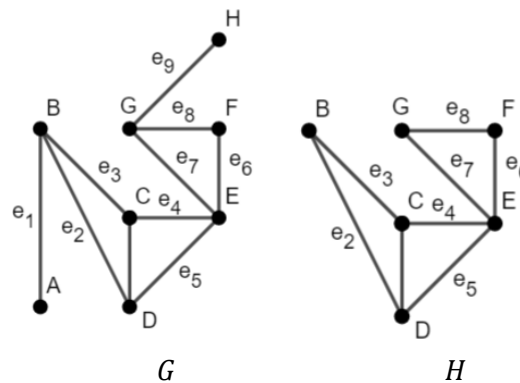
secara matematis dapat dituliskan dengan jika  $H \subseteq G$  maka  $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$  (Chartrand & Zhang, 2008).

Subgraf terbagi menjadi dua yakni subgraf yang diinduksi titik dan subgraf yang diinduksi sisi. Subgraf yang diinduksi titik memisalkan  $S \subseteq V(G)$  dan  $S \neq \emptyset$ . Subgraf yang diinduksi  $S$  dituliskan  $\langle S \rangle$  yang diartikan sebagai subgraf maksimal dari  $G$  dengan himpunan titik  $S$ , sehingga  $\langle S \rangle$  memuat keseluruhan sisi dari  $G$  yang menghubungkan titik-titik pada  $S$ . Subgraf yang diinduksi titik dicontohkan pada **Gambar 2.3**.

**Definisi Subgraf Diinduksi Titik:**

Subgraf  $H$  dari  $G$  dikatakan subgraf yang diinduksi titik (*vertex-induced-subgraph*) jika  $H = \langle S \rangle$  untuk suatu himpunan tak-kosong  $S \subseteq V(G)$  (Chartrand & Zhang, 2008).

**Gambar 2.3 Subgraf Diinduksi Titik**



(Sumber: Dokumen Penulis)

Keterangan:

$G$  = Graf

$H$  = Subgraf  $G$  yang diinduksi titik

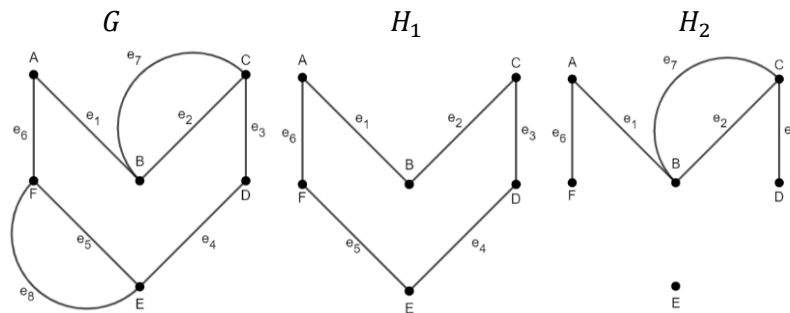
Sedangkan subgraf yang diinduksi sisi didefinisikan misalnya  $X$  himpunan tak-kosong yang merupakan subhimpunan dari  $E(G)$ . Maka subgraf yang diinduksi oleh  $X$  adalah subgraf minimal dari  $G$  dengan himpunan sisi adalah  $X$  dan dinotasikan dengan  $\langle X \rangle$ . Artinya,  $\langle X \rangle$  terdiri atas titik-titik di  $G$  yang *incident*

dengan paling sedikit satu sisi di  $X$ . Subgraf yang diinduksi sisi dicontohkan pada **Gambar 2.4**.

**Definisi Subgraf Diinduksi Sisi:**

*Subgraf  $H$  dari  $G$  dikatakan subgraf yang diinduksi sisi (edge-induced-subgraph) jika  $H = X$  untuk suatu himpunan tak-kosong  $X \subseteq E(G)$  (Chartrand & Zhang, 2008).*

**Gambar 2. 4 Subgraf Diinduksi Sisi**



(Sumber: Dokumen Penulis)

Keterangan:

$G$  = Graf

$H_1$  = Subgraf  $G$  yang diinduksi sisi

$H_2$  = Bukan subgraf  $G$  yang diinduksi sisi karena terdapat satu titik yang tidak ber-incident

**B. Pewarnaan Graf**

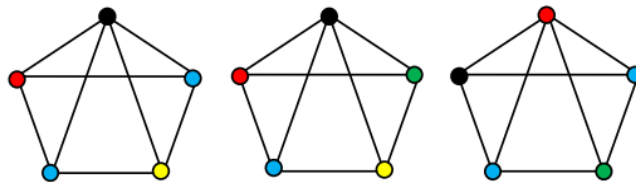
Menurut sejarah, pemecahan masalah menggunakan pewarnaan graf pertama kali dilakukan oleh seorang mahasiswa bernama Frederick Guthrie pada tahun 1852 terkait pewarnaan peta yang dilakukan sedemikian sehingga setiap wilayah yang memiliki batas yang sama diberikan warna yang berbeda (Chartrand & Zhang, 2008). Pada hakikatnya, pewarnaan graf merupakan suatu pemberian label pada suatu graf dengan cara mewarnai elemen graf yang menjadi subjek dalam suatu permasalahan (Mahardika & Marcos, 2017).

Munir (2010) menyatakan bahwa jenis pewarnaan graf terbagi menjadi 3 yakni:

1. Pewarnaan Simpul (Vertex Coloring)

Pewarnaan simpul ialah pemberian warna pada graf melalui titik sehingga tidak terdapat warna yang serupa di setiap dua titik bertetangga (Lipschutz & Lipson, 2017). Sebagai contoh, diberikan suatu graf  $G$  dengan bilangan kromatik dinyatakan dengan  $\chi(G) = 4$  yang memiliki arti bahwa jumlah warna minimal yang dihasilkan dari titik bertetangga adalah 4. Maka dapat disajikan dalam **Gambar 2.5**.

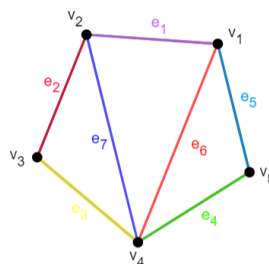
**Gambar 2. 5 Graf Pewarnaan Simpul**



(Sumber: Ariyanti & Azizah, 2020)

2. Pewarnaan sisi dilakukan dengan cara mewarnai setiap sisi graf sedemikian sehingga tidak ada warna serupa pada setiap dua sisi yang saling terhubung (bertetangga) (Munir, 2010). Contoh pewarnaan sisi dengan bilangan kromatik  $\chi(G) = 7$  pada graf dapat dilihat pada **Gambar 2.6**.

**Gambar 2. 6 Graf Pewarnaan Sisi**



(Sumber: Dokumen Penulis)



Pewarnaan graf tidak terlepas dari adanya batas warna yang digunakan dalam pewarnaan baik untuk pewarnaan simpul, sisi, maupun wilayah. Jumlah batas warna ini disebut sebagai bilangan kromatik yang disimbolkan dengan  $\chi$  (Huruf Yunani chi). Pada dasarnya, tidak ada rumus umum untuk menentukan jumlah bilangan kromatik pada suatu graf. Graf  $G$  dapat diwarnai  $k$  jika terdapat pewarnaan  $G$  dari himpunan  $k$  warna. Dengan kata lain, graf  $G$  dapat diwarnai  $k$  jika terdapat pewarnaan  $k$  pada  $G$  (Chartrand & Zhang, 2008).

Prinsip dasar dalam menentukan batas bawah dan batas atas penentuan bilangan kromatik sebagai berikut (Gross, dkk., 2019):

1. Batas atas dinotasikan dengan  $\chi(G) \leq k$ , dengan  $k$  merupakan jumlah warna pada graf  $G$ .
2. Batas bawah dinotasikan dengan  $\chi(G) \geq k$ , dengan menentukan subgraf yang memenuhi  $k$ -warna pada graf  $G$ .

Kemudian, Teorema Brooks hadir untuk mempertajam batas atas penentuan bilangan kromatik. Teorema Brooks memandang  $\Delta$  sebagai derajat terbesar simpul graf  $G$ , berlaku  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$  (Araujo, 2012).

### C. *Algoritma Welch Powell*

*Algoritma Welch Powell* merupakan salah satu algoritma yang dapat digunakan dalam pewarnaan graf. Algoritma ini juga merupakan salah satu teknik yang dapat diimplementasikan untuk menyusun jadwal (Bustan & Salim, 2019). *Algoritma Welch Powell* mewarnai graf berdasarkan simpul-simpul berderajat tertinggi yang mengadopsi *Largest Degree Ordering (LDO)*, LDO merupakan algoritma yang didasari pada prinsip pengambilan nilai derajat tertinggi untuk diwarnai lebih dulu (Putri, 2021).

Beberapa hal yang menjadi kelebihan dari *Algoritma Welch Powell* adalah mudah untuk diimplementasikan dan memiliki tahapan penyelesaian yang sederhana (Tobing, 2019). Namun algoritma ini tidak terlepas dari kelemahannya yakni solusi yang didapatkan akan menjadi kurang efisien untuk data dengan jumlah yang besar karena *Algoritma Welch Powell* lebih cocok untuk permasalahan orde kecil (Firdaus, 2020). Selain itu, *Algoritma Welch*

*Powell* bukan termasuk algoritma optimal sehingga solusi akhir yang diterima tidak selalu menentukan batas bawah dari dari pewarnaan minimum. Akan tetapi, algoritma ini dapat menentukan batas atas dari warna minimum (Supiyandi & Eka, 2019).

Langkah-langkah pewarnaan graf dengan *Algoritma Welch Powell* dalam menentukan jadwal seminar proposal adalah sebagai berikut (Lipschutz & Lipson, 2007):

1. Mengurutkan setiap simpul graf  $G$  berdasarkan nilai derajat tertinggi.
2. Memberikan warna pertama  $C_1$  pada simpul berderajat tertinggi, kemudian memberikan warna yang serupa pada simpul yang tidak bertetangga dengan  $C_1$ .
3. Mengulangi langkah ke-2 dengan memberikan warna kedua  $C_2$  pada urutan derajat simpul terbesar kedua.
4. Mengulangi langkah ke-3 yakni memberikan warna ketiga  $C_3$ , warna keempat  $C_4$ , dan seterusnya hingga seluruh simpul selesai diberikan warna.

#### **D. Algoritma Tabu Search**

*Algoritma Tabu Search* merupakan suatu metode optimasi berbasis *local search* untuk melakukan pencarian secara efektif dan efisien yang bergerak dari satu solusi ke solusi berikutnya. Ide dasar dari *Algoritma Tabu Search* adalah mencegah proses pencarian dari *local search* agar tidak terjadi pencarian ulang pada ruang solusi yang sudah ditelusuri, dengan memanfaatkan suatu struktur memori yang mencatat sebagian jejak proses pencarian yang telah dilakukan (Saldi, 2017).

Kelebihan *Algoritma Tabu Search* terletak pada struktur memori yang fleksibel (Gendrau & Potvin, 2010). Kandidat solusi dalam *Algoritma Tabu Search* tidak dipilih secara acak maupun secara *probabilistik* (peluang) (Indah, 2017). Hal ini menjadikan proses pencarian lebih optimal karena tidak terjadi perulangan pada daerah solusi yang sama atau pada kandidat solusi yang pernah dikunjungi sebelumnya. Hal inilah yang kemudian membuat *Algoritma Tabu Search* lebih unggul daripada algoritma yang lain. Di samping itu, satu hal yang



harus diperhatikan sebelum mengimplementasikan *Algoritma Tabu Search* adalah menentukan batasan warna yang nilainya berada dalam rentang bilangan kromatik.

Langkah-langkah penyelesaian metode pewarnaan graf dengan menggunakan *Algoritma Tabu Search* pada penjadwalan seminar proposal adalah sebagai berikut (Aladag & Hocaoglu, 2007):

1. Mewarnai titik secara acak.
2. Menentukan apakah solusi awal (hasil pewarnaan secara acak) memenuhi kriteria solusi yang diharapkan.
3. Jika terjadi konflik (terdapat titik yang bertetangga memiliki warna sama) maka diperlukan solusi baru dan solusi yang didapat dengan melakukan *move* (pemindahan warna).
4. Menyimpan solusi yang tidak tabu dalam *tabu list* atau *short term memory* (daftar kandidat solusi yang sudah pernah dicoba) dan mengabaikan solusi yang tabu.
5. Memilih solusi optimal dari *tabu list*.
6. Menerapkan solusi optimal pada graf.
7. Jika masih ada konflik maka kembali ke langkah ke-3. tetapi jika tidak ada konflik maka proses pewarnaan selesai.

#### **E. Penjadwalan Seminar Proposal**

Penjadwalan berasal dari kata jadwal yang memiliki makna yaitu suatu pembagian waktu yang didasari oleh perencanaan pengaturan urutan kerja yang terperinci, biasanya direpresentasikan dengan daftar atau tabel kegiatan atau perencanaan (KBBI, 2016). Sementara penjadwalan adalah proses atau cara yang digunakan untuk pembagian sumber daya selama periode waktu tertentu di banyak industri manufaktur dan jasa secara efisien (Pinedo, 2016). Kegiatan penjadwalan ini dinilai penting dilakukan untuk merencanakan suatu kegiatan dan mengelola waktu secara optimal. Terdapat beberapa manfaat melakukan penjadwalan, salah satunya adalah untuk melatih kedisiplinan. Di bidang akademik, penjadwalan bermanfaat untuk mengorganisasi waktu pada kegiatan tertentu sehingga tidak ditemukan jadwal bentrok antara satu kegiatan dengan

kegiatan lainnya. Dalam salah satu praktiknya, penjadwalan di perguruan tinggi dilakukan untuk menentukan jadwal ujian seminar proposal.

Dalam lingkup perkuliahan, seminar proposal dilakukan untuk mempresentasikan rencana penelitian secara ringkas. Presentasi seminar proposal terdiri dari bab 1 hingga bab 3 yang mana di dalamnya berisi latar belakang hingga metodologi yang hendak digunakan dalam penelitian. Dengan adanya seminar proposal, mahasiswa akan mendapatkan masukan dari dosen pembimbing dan dosen penguji untuk menyempurnakan rencana penelitian yang kemudian akan dikembangkan menjadi sebuah topik skripsi atau laporan akhir mahasiswa. Di IAIN Kediri sendiri, khususnya Fakultas Tarbiyah Program Studi Pendidikan Agama Islam, seminar proposal menjadi salah satu mata kuliah 2 sks yang harus diikuti oleh seluruh mahasiswa selama satu semester, dengan syarat lulus mata kuliah prasyarat yakni Metodologi Penelitian. Adapun prosedur dalam mengikuti seminar proposal di IAIN Kediri diantaranya:

1. Mengajukan judul penelitian
2. Menunggu ACC judul dan penentuan dosen pembimbing
3. Mengambil mata kuliah seminar proposal skripsi berdasarkan nama dosen pembimbing
4. Mengikuti bimbingan proposal bersama dosen pembimbing
5. Melakukan pendaftaran seminar proposal dengan mencantumkan bukti ACC dari dosen pembimbing
6. Melaksanakan ujian seminar proposal bersama dosen pembimbing dan dosen penguji

## **F. Variabel Penelitian**

Menurut Sugiyono (2015), variabel penelitian adalah segala sesuatu yang ditetapkan oleh peneliti sebagai bahan kajian untuk memperoleh informasi yang kemudian dapat ditarik kesimpulannya. Dalam penelitian ini diambil judul Perbandingan Pewarnaan Graf Dengan *Algoritma Welch Powell* dan *Algoritma Tabu Search* Dalam Menentukan Jadwal Seminar Proposal.

Peneliti mengidentifikasi beberapa variabel meliputi:

1. Data nama mahasiswa pendaftar seminar proposal, nama dosen pembimbing, nama dosen penguji, data ruangan dan waktu dilaksanakannya seminar proposal Program Studi Pendidikan Agama Islam tahun ajaran 2021/2022 sebagai variabel input.
2. Jadwal seminar proposal Program Studi Pendidikan Agama Islam tahun ajaran 2021/2022 sebagai variabel output.