BAB II

LANDASAN TEORI

A. Gambaran Umum Wilayah Kota Kediri

1. Sejarah Singkat

Kota Kediri lahir pada 27 Juli 1879. Awal mula Kediri berdiri sebagai pemukiman perkotaan adalah ketika Airlangga memindahkan pusat pemerintahan kerajaannya dari Kahuripan ke Dahanapura (Kota Api) menurut Serat Calon Arang yang kemudian dikenal sebagai Daha. Sepeninggal Raja Airlangga, wilayah Medang dibagi menjadi dua yaitu Panjalu di barat dan Janggala di timur. Daha menjadi pusat pemerintahan Kerajaan Panjalu dan Kahuripan menjadi pusat pemerintahan Kerajaan Jenggala. Panjalu oleh penulis-penulis periode belakangan juga disebut sebagai Kerajaan Kadiri/Kediri.

2. Luas dan Batas Wilayah Administrasi

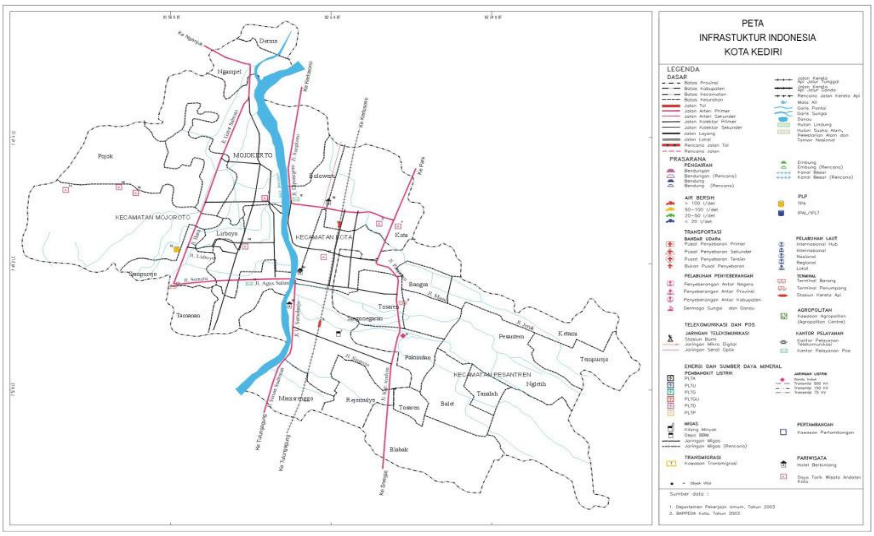
Kota Kediri memiliki luas wilayah sebesar 63.404 km^2, dimana secara administratif terbagi menjadi tiga Kecamatan yaitu, Kecamatan Mojoroto, Kecamatan Kota dan Kecamatan Pesantren dengan total 46 Kelurahan. Kecamatan Mojoroto terdiri dari 14 Kelurahan dengan luas wilayah 24,6 km^2, Kecamatan Kota dengan luas wilayah 14,9 km^2 terdiri dari 17 kelurahan dan Kecamatan Pesantren dengan luas 23,9 km^2 terdiri dari 15 kelurahan.

Kota Kediri berbatasan langsung dengan wilayah Kabupaten Kediri, yaitu di sebelah selatan berbatasan dengan Kecamatan Kandat dan

Ngadiluwih dan sebelah utara berbatasan dengan Kecamatan Gampengrejo dan Ngasem. Sementara itu di sebelah Barat berbatasan langsung dengan Kecamatan Banyakan dan Semen, serta di sebelah Timur berbatasan dengan Kecamatan Wates dan Gurah.

3. Letak dan Kondisi Geografis

Berdasarkan kondisi geografisnya, Kota Kediri dikelilingi oleh wilayah Kabupaten Kediri yang terletak di sebelah selatan garis khatulistiwa. Dimana, Kota Kediri berada di antara $111{,}05° - 112.03°$ BT dan $7{,}45° - 7{,}55°$ LS. Kota Kediri dilalui oleh Sungai Brantas yang mengalir dari selatan ke utara sepanjang 7 km dan membagi wilayah Kota Kediri menjadi wilayah timur dan barat. Wilayah timur sungai merupakan Kecamatan Kota dan Kecamatan Pesantren, sedangkan wilayah barat sungai merupakan Kecamatan Mojoroto. Dari aspek topografinya Kota Kediri terletak pada ketinggian rata-rata 67 m diatas permukaan laut dengan tingkat kemiringan $0 - 40\%$. Wilayah Kota Kediri dapat dilihat berdasarkan peta dibawah ini



***Gambar 2.1** Peta Wilayah Kota Kediri*
(Sumber: Profil Kota Kediri https://www.kedirikota.go.id)

B. *Sustainable Development Goals* (SDGs) 2030

1. Konsep *Sustainable Development Goals*

Konsep SDGs lahir dalam Konferensi yang dilaksanakan oleh PBB mengenai Pembangunan Berkelanjutan di Rio de Jainero pada tahun 2012, dimana menghasilkan tujuan bersama yang mampu memelihara keseimbangan antara lingkungan, sosial dan ekonomi (Ishatono & Raharjo, 2016). Pembangunan berkelanjutan menurut Emil Salim bertujuan untuk meningkatkan kesejahteraan masyarakat yang pada hakekatnya ditujukan untuk pemerataan pembangunan antar generasi masa kini maupun mendatang untuk memenuhi kebutuhan dan aspirasi manusia. SDGs (*Sustainable Development Goals*) dipilih sebagai pengganti MDGs (*Millennium Development Goals*) yang disebabkan oleh penurunan daya dukung alam terhadap kehidupan manusia seperti jumlah penduduk dunia yang terus meningkat sehingga penggunaan sumber daya alam untuk kehidupan sehari-hari juga ikut meningkat (Rahadian, 2016).

Dalam memelihara keseimbangan tiga dimensi pembangunan berkelanjutan tersebut, SDGs membawa 5 prinsip mendasar atau pondasi utama yaitu *people* (manusia), *planet* (bumi), *prosperity* (kemakmuran), *peace* (perdamaian), dan *partnership* (kerja sama) yang ingin mencapai tujuan di tahun 2030 salah satunya adalah mengakhiri kemiskinan (Ishatono & Raharjo, 2016). Kemiskinan masih menjadi masalah utama bagi setiap negara di dunia, terutama bagi negara berkembang seperti Indonesia. Suparlan dalam Pratama (2015) mendefinisikan kemiskinan adalah suatu keadaan serba kekurangan harta dan benda yang berharga dimana diderita oleh seseorang atau sekelompok orang yang hidup dalam lingkungan serba miskin atau kekurangan modal, baik dalam uang, pengetahuan, kesempatan berusaha dan bekerja, serta lebih jauh lagi tidak mempunyai kemampuan, kebebasan, aset dan aksesibilitas untuk kebutuhan di masa mendatang.

2. **Indikator Pencapaian *Sustainable Development Goals***

Indikator pencapaian *SDGs 2030* yang telah dirumuskan adalah sebagai berikut (Badan Pusat Statistik, 2019):

a. Mengakhiri kemiskinan dalam segala bentuk dimanapun
b. Menghilangkan kelaparan, mencapai ketahanan pangan dan gizi yang baik, serta meningkatkan pertanian berkelanjutan
c. Menjalin kehidupan yang sehat dan meningkatkan kesejahteraan untuk seluruh penduduk pada semua usia
d. Menjamin kualitas pendidikan inklusif dan merata, serta meningkatkan kesempatan belajar sepanjang hayat untuk semua
e. Mencapai kesetaraan gender dan memberdayakan kaum perempuan
f. Menjamin ketersediaan dan pengelolaan air bersih dan sanitasi yang berkelanjutan untuk semua
g. Menjamin akses energi yang terjangkau, andal, berkelanjutan dan modern untuk semua
h. Meningkatkan pertumbuhan ekonomi yang inklusif dan berkelanjutan, kesempatan kerja yang produktif dan menyeluruh, serta pekerjaan layak
i. Membangun infrastruktur yang tangguh, meningkatkan industri inklusif dan berkelanjutan, serta mendorong inovasi

j. Mengurangi kesenjangan intra dan atarnegara
k. Menjadikan kota dan permukiman inklusif, aman, tangguh dan berkelanjutan
l. Menjamin pola produksi dan konsumsi yang berkelanjutan
m. Mengambil tindakan cepat untuk mengatasi perubahan iklim dan dampaknya
n. Melestarikan dan memanfaatkan secara berkelanjutan sumber daya kelautan dan samudra unruk pembangunan berkelanjutan
o. Melindungi, merestorasi dan meningkatkan pemanfaatan berkelanjutan ekosistem daratan, mengelola hutan secara lestari, menghentikan penggurunan, memulihkan degradasi lahan, serta menghentikan kehilangan keanekaragaman hayati
p. Menguatkan masyarakat yang inklusif dan damai untuk pembangunan berkelanjutan, menyediakan akses keadilan untuk semua, dan membangun kelembagaan yang efektif, akuntabel dan inklusif di semua tingkatan
q. Menguatkan sarana pelaksanaan dan merevitalisasi kemitraan global untuk pembangunan berkelanjutan.

C. Pertumbuhan Penduduk

Badan Pusat Statistik (BPS) mendefinsikan penduduk adalah semua orang yang berdomisili di wilayah geografis Republik Indonesia selama 6 bulan atau lebih dan atau mereka yang berdomisili kurang dari 6 bulan tetapi bertujuan untuk menetap. Pertumbuhan penduduk memberikan pengaruh yang cukup besar bagi perekonomian pada suatu negara, dimana implikasi yang dilihat dari segi ukuran, pengembangan dan kualitas sangat penting untuk dipertimbangkan dalam perencanaan pembangunan di masa mendatang. Menurut Lucas, Donald & Young pertumbuhan penduduk dipengaruhi oleh tiga elemen utama yaitu fertilitas (kelahiran), mortalitas (kematian) dan migrasi (Wardhana dkk., 2020). Ketiga elemen tersebut masing-masing memberikan pengaruh yang positif maupun negatif, dimana tingkat fertilitas dalam pertumbuhan penduduk memberikan pengaruh yang positif sedangkan tingkat mortalitas memberikan pengaruh negatif karena merupakan faktor pengurang terhadap laju pertumbuhan penduduk (Wardhana dkk., 2020).

Hal-hal yang berkaitan dengan penduduk termasuk pertumbuhannya dipelajari melalui ilmu kependudukan atau demografi, dimana diperoleh tujuan sebagai berikut (Marhaeni, 2018).

1. Membandingkan kuantitas penduduk suatu wilayah untuk mengetahui kebutuhan penduduknya.
2. Dapat memperkirakan dan menganalisis bagaimana kondisi perkembangan berbagai komponen demografi yang membentuk kuantitas atau jumlah penduduk dan membandingkan jumlah penduduk di suatu wilayah tertentu dengan wilayah yang lainnya
3. Memahami penyebab perkembangan penduduk seperti fertilitas, mortalitas dan migrasi penduduk dimana dapat dijadikan dasar dalam pembuatan kebijakan yang lebih tepat mengenai pengendalian jumlah penduduk di suatu wilayah

4. Mengetahui kebutuhan di suatu wilayah dengan mengetahui komposisi atau distribusi penduduk baik secara ekonomi, sosial dan demografi
5. Memahami cara menghitung tingkat pertumbuhan penduduk dengan berbagai metode seperti aritmatik, geometri maupun eksponensial serta perkembangan tingkat pertumbuhan penduduk dari waktu ke waktu maupun di masa mendatang dan sebagainya dengan berbagai konsekuensinya

Mengutip pidato kenegaraan Presiden Soeharto tahun 1983, seluruh perencanaan pembangunan akan berhasil dengan lancar apabila ditunjang oleh pemecahan masalah kependudukan diantaranya pengendalian kelahiran, penurunan tingkat kematian, penyebaran penduduk, perpanjangan harapan hidup, pendidikan dan masalah lapangan pekerjaan (Marhaeni, 2018). Berdasarkan hal tersebut dapat disimpulkan bahwa masalah kependudukan khususnya pertumbuhan penduduk harus segera ditemukan solusinya agar cita-cita pembangunan bangsa dapat tercapai.

D. Estimasi Pertumbuhan Penduduk (*Population Estimate*)

Estimasi penduduk merupakan penaksiran atau perkiraan jumlah penduduk pada waktu tertentu (Siegel dkk., 2004). Terdapat beberapa istilah dan metode yang digunakan untuk memperkirakan jumlah penduduk, antara lain perkiraan penduduk (*population estimate*), peramalan penduduk (*population forecast*) dan proyeksi penduduk (*population projection*). Penggunaan proyeksi penduduk berfungsi untuk mengetahui keadaan penduduk di masa depan maupun di masa lampau.

Proyeksi penduduk menurut Badan kependudukan dan keluarga berencana nasional bukan hanya sekedar ramalan keadaan penduduk pada masa mendatang, tetapi suatu perhitungan ilmiah yang didasarkan pada beberapa asumsi tertentu. Ketepatan memilih asumsi akan berpengaruh terhadap hasil proyeksi penduduk. Selain itu, beberapa asumsi tersebut juga dipengaruhi oleh kecenderungan yang terjadi di masa lalu dengan memperhatikan berbagai faktor yang sekaligus berpengaruh terhadap laju pertumbuhan penduduk.

E. Fungsi Logaritma Natural

Fungsi logaritma natural atau logaritma alami dinyatakan oleh $\ln$ dan didefinisikan oleh (Varberg dkk., 2007):

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

Jika a dan b merupakan bilangan-bilangan positif dan r sebuah bilangan rasional, maka logaritma natural memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
3. $\ln ab = \ln a + \ln b$
4. $\ln a^r = r \ln a$

F. Fungsi Eksponen Alami

Bilangan e atau disebut dengan fungsi eksponen alami merupakan invers dari ln yang pertama kali dikenalkan oleh Leonhard Euler (Varberg dkk., 2007). Secara sederhana e^x didefinisikan untuk semua nilai x baik rasional maupun irasional sebagai

$$e^x = \exp x$$

sehingga, berdasarkan definisi diatas maka diperoleh sifat-sifat fungsi eksponen sebagai berikut:

1. $e^{\ln x} = x, \;\; x > 0$
2. $\ln(e^y) = y$, untuk semua y

G. Limit

1. Definisi Limit Secara Intuisi

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = L$, maka berarti bahwa ketika x dekat tetapi berlainan dengan c, maka $f(x)$ dekat ke L

2. Definisi Limit Secara Presisi

Mengatakan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = L$, maka berarti bahwa untuk tiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan (berapapun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian rupa sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$; yakni,

$$0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

3. Definisi Limit Kiri dan Limit Kanan

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = L$, maka berarti bahwa ketika x dekat tetapi pada sebelah kanan c, maka $f(x)$ dekat ke L. Demikian pula, untuk mengatakan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = L$ berarti bahwa ketika x dekat tetapi pada sebelah kiri c, maka $f(x)$ dekat ke L.

4. Teorema Limit Utama

Misalkan n bilangan bulat positif, k konstanta, serta f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c. Maka:

a. $\lim_{x \to c} k = k$

b. $\lim_{x \to c} x = c$

c. $\lim_{x \to c} k\, f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$

d. $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

e. $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

f. $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

g. $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

h. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n$

i. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ ketika n genap.

H. Turunan atau Diferensial

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limitnya ada dan bukan ∞ atau $-\infty$. Jika nilai limitnya memang ada, maka dapat dikatakan bahwa f terdiferensialkan di c.

Teorema 2.1 (Aturan Fungsi Konstanta)

Jika $f(x) = k$, dengan k suatu konstanta maka untuk sebarang $x, f(x) = 0$ yakni $D_x(k) = 0$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Teorema 2.2 (Aturan Fungsi Satuan)

Jika $f(x) = x,$ maka $f'(x) = 1$; yakni $D_x(x) = 1$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Teorema 2.3 (Aturan Pangkat)

Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$; yakni $D_x(x^n) = nx^{n-1}$

Bukti

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h}$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Teorema 2.4 (Aturan Kelipatan Konstanta)

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$ yakni,

$$D_x[k \cdot f'(x)] = k \cdot D_x f(x)$$

Dengan kata lain, pengali konstanta k dapat dikeluarkan dari operator D_x

Bukti: misalkan $F(x) = \ k \cdot f(x)$, maka:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot \ \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= k \cdot f'(x)$$

Teorema 2.5 (Aturan Jumlah)

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(f + g'x=f'x+g'(x)$ yakni,

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

Dengan kata lain, turunan dari suatu jumlah adalah jumlah dari turunan-turunan.

Bukti: misalkan $F(x) = f(x) + g(x)$, maka:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)]}{h} - \frac{[f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

Teorema 2.6 (Aturan Selisih)

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(f - g'x=f'x-g'(x)$ yakni,

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$$

Bukti: misalkan $F(x) = f(x) - g(x)$, maka:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - g(x+h)]}{h} - \frac{[f(x) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) - g'(x)$$

Teorema 2.7 (Aturan Hasil Kali)

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

yakni, $D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x g(x) - g(x)D_x f(x)$

Bukti: Misalkan $F(x) = f(x)g(x)$, maka:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{g(x) \cdot f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Teorema 2.8 (Aturan Hasil Bagi)

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan dengan $g \neq 0$, maka

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Yaitu,

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}$$

Bukti: Misalkan $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, maka:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right\}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Teorema 2.9 (Aturan Rantai)

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika g terdiferensiasikan di x dan f terdiferensiasikan di $u = g(x)$, maka fungsi komposisi $f \circ g$, yang didefinisikan oleh $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$, adalah terdiferensiasikan di x dan $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$, yakni:

$$D_x(f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big)g'(x) \text{ atau } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

I. Integral

Misalkan F merupakan suatu anti-turunan pada interval I jika $D_x F(x) = f(x)$ pada I, yakni jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I. Anti turunan biasa dikenal integral dilambangkan dengan $\int$(notasi Leibniz).

Teorema 2.10 (Aturan Pangkat)

Jika r merupakan sebarang bilangan rasional kecuali -1, maka:

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Bukti: Ruas kanan apabila diturunkan maka

$$D_x\left[\frac{x^{r+1}}{r+1} + C\right] = \frac{1}{r+1} + (r+1)x^r = x^r$$

Dimana, untuk mengembangkan suatu hasil berbentuk

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

adalah cukup dengan menunjukkan

$$D_x[F(x) + C] = f(x)$$

Leibniz menggunakan istilah integral tak tentu sebagai pengganti anti-turunan (Varberg dkk., 2007). Dimana, dalam lambang $\int f(x)\ dx$, $\int$ disebut tanda integral dan $f(x)$ disebut sebagai integran. Leibniz menggunakan istilah tak tentu (*indefinite*) untuk menyatakan secara tidak langsung bahwa integral tak tentu selalu melibatkan konstanta sebarang.

Teorema 2.11 (Integral Tak-Tentu adalah Operator Linear)

Misalkan f dan g mempunyai anti-turunan (integral tak tentu) dan k suatu konstanta, maka:

1. $\int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx$;

2. $\int\ [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

3. $\int\ [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.

Bukti: untuk membuktikan teorema diatas, yang perlu dilakukan adalah cukup dengan mendiferensialkan ruas kanan dan mengamati bahwa integran yang diperoleh adalah ruas kiri

1. $D_x\ [k \int f(x)dx] = kD_x \int f(x)dx = k\, f(x)$

2. $D_x[\int f(x)dx + \int g(x)dx] = D_x \int f(x)dx + D_x \int g(x)dx)$

$$= f(x) + g(x)$$

3. $D_x[\int f(x)dx - \int g(x)dx] = D_x \int f(x)dx - D_x \int g(x)dx$

$$= f(x) - g(x)$$

Teorema 2.12 (Aturan Pangkat yang Digeneralisir)

Misalkan g suatu fungsi yang dapat didiferensiasikan dan r suatu bilangan rasional yang bukan -1. Maka:

$$\int [g(x)]^r\ g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+} + C$$

Untuk menerapkan teorema ini yang harus dilakukan pertama kali adalah mengenali fungsi g dan g' di dalam integran.

J. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan sebarang persamaan dengan nilai yang tidak diketahui, dimana berupa suatu fungsi yang melibatkan turunan (diferensial) dari fungsi yang tidak diketahui tersebut (Varberg dkk., 2007).

Penyelesaian persamaan diferensial dapat dibagi menjadi dua sebagai berikut (Darmawijoyo, 2011).

1. Penyelesaian Persamaan Diferensial Eksplisit

Suatu fungsi $f(x)$ merupakan penyelesaian eksplisit dari persamaan diferensial jika $f(x)$ memenuhi persamaan untuk setiap x dalam interval $I: a < x < b$, dimana apabila y disubstitusikan dengan $f(x)$, y' dengan $f'(x)$, y'' dengan $f''(x)$ dan seterusnya maka persamaan yang didapatkan adalah identitas dalam x.

<u>Contoh:</u>

Ujilah bahwa fungsi yang didefinisikan oleh $y = f(x) = x^2$ adalah penyelesaian dari $\frac{1}{4}(y')^2 - xy' + y = 0$

<u>Penyelesaian:</u>

Diferensialkan terlebih dahulu fungsi $y = f(x) = x^2$, maka $y' = f'(x) = 2x$. Dengan mensubstitusikan $y = f(x)$ dan $y' = f'(x)$ ke bentuk penyelesaian diatas, akan diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\frac{1}{4}(y')^2 - xy' + y = 0$$

$$\frac{1}{4}(2x)^2 - x(2x) + x^2 = 0$$

$$x^2 - 2x^2 + x^2 = 0$$

Karena persamaan pada ruas kiri adalah 0 berarti persamaan tersebut merupakan persamaan identitas untuk solusi penyelesaian $y = f(x) = x^2$.

2. Penyelesaian Persamaan Diferensial Implisit

Suatu relasi $g(x, y) = 0$ dinamakan penyelesaian implisit dari persamaan diferensial $F(x, y, y', c, \dots, y^n) = 0$ pada interval $I: a < x < b$, jika terdapat fungsi $f(x)$ yang didefinisikan pada I sedemikian hingga $g\big(x, f(x)\big) = 0$ untuk setiap x dalam I. Selain itu $f(x)$ memenuhi persamaan $F(x, y, y', c, \dots, y^n) = 0$ jika $F(x, f(x), f'(x), c, \dots, y^n) = 0$ untuk setiap x dalam I.

<u>Contoh:</u>

Ujilah bahwa $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ adalah penyelesaian implisit dari persamaan diferensial $F(x, y, y') = yy' + x = 0$ pada interval $I: -5 < X < 5$.

<u>Penyelesaian:</u>

Tinjau bahwa fungsi $g(x, y)$ mendefinisikan $y = f(x)$, sehingga:

$$y^2 = 25 - x^2$$

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

Kemudian substitusikan kedalam persamaan $F(x, y, y') = yy' + x = 0$ dan akan diperoleh persamaan:

$$F(x, f(x), f'(x)) = \sqrt{25 - x^2}\left(-\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}\right) + x = 0$$

$$-x + x = 0$$

Karena persamaan pada ruas kiri bernilai 0 berarti persamaan tersebut merupakan identitas dalam x dan kedua persyaratan dalam definisi diatas terpenuhi. Jadi, dapat disimpulkan bahwa fungsi $g(x, y)$ diatas merupakan penyelesaian implisit dari persamaan diferensial $F(x, y, y')$ tersebut.

Persamaan diferensial secara umum dibagi menjadi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP), sedangkan berdasarkan kelinierannya dibagi menjadi dua, yakni Persamaan Diferensial

Linier dan Persamaan Diferensial non Linier (Rina & Husna, 2019). Berikut merupakan pembagian persamaan diferensial secara umum, yaitu:

1. **Persamaan Diferensial Biasa**

   Suatu persamaan dikatakan persamaan diferensial biasa apabila melibatkan fungsi dari satu variabel dan beberapa turunannya, dimana persamaan tersebut memuat masing-masing satu variabel bebas dan terikat. Bentuk umum persamaan diferensial biasa:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \qquad (2.1)$$

   Contoh: $\frac{dy}{dx} = 2$

2. **Persamaan Diferensial Parsial**

   Suatu persamaan dikatakan sebagai persamaan diferensial parsial apabila dalam persamaan tersebut melibatkan fungsi dari dua variabel atau lebih dan beberapa turunan parsialnya. Persamaan diferensial parsial memuat satu variabel terikat dari dua atau lebih variabel bebasnya. Bentuk umum dari persamaan diferensial parsial adalah sebagai berikut (Chapra & Canale, 2010):

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0 \qquad (2.2)$$

   dimana A, B dan C adalah fungsi x dan y, sedangkan D adalah fungsi $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}$, dan $\frac{\partial u}{\partial y}$.

   Contoh: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$

K. Model Pertumbuhan Penduduk

Pertumbuhan penduduk identik dengan suatu proses yang kontinu, sehingga model matematika yang dapat digunakan untuk mengestimasikan pertumbuhan penduduk merupakan model populasi kontinu. Terdapat beberapa macam model pertumbuhan populasi yang kontinu yaitu model populasi eksponensial dan model populasi logistik (Brauer & Castillo-Chávez, 2012).

1. Model Pertumbuhan Eksponensial

Malthus pada tahun 1798 membuat sebuah model pertumbuhan eksponensial, dimana misalkan kepadatan penduduk di suatu spesies pada waktu t dilambangkan dengan $x(t)$ dan diasumsikan x adalah P (populasi) sehingga menjadi $P(t)$ yang melambangkan jumlah populasi yang bertambah ataupun luruh. Kemudian apabila diasumsikan $P(t)$ merupakan suatu fungsi yang dapat diturunkan terhadap waktu dan termasuk fungsi yang kontinu, dan r merupakan laju pertumbuhan populasi maka model pertumbuhan eksponensial dinyatakan dalam bentuk dibawah ini (Brauer & Castillo-Chávez, 2012):

$$\frac{dP}{dt} = rP(t) \qquad (1.3)$$

dimana merupakan persamaan diferensial biasa orde 1, sehingga solusi umumnya dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

$$\int \frac{dP}{P} = \int r\, dt$$

$$\ln P(t) = rt + c$$

$$e^{\ln P(t)} = e^{rt+c}$$

$$P(t) = e^{rt+c} \tag{1.4}$$

Untuk menggambarkan dinamika populasi pada populasi tertentu dapat dilakukan dengan menentukan kondisi awal $t = 0$ sehingga ukuran populasi awal $P(0) = P_0$, maka diperoleh nilai $c = \ln P_0$ dan apabila disubstitusikan ke persamaan sebelumnya menghasilkan:

$$P(t) = e^{rt+\ln P_0} = e^{rt}e^{P_0} = P_0 e^{rt} \tag{1.5}$$

Persamaan diatas merupakan solusi khusus dari model pertumbuhan eksponensial, dimana apabila nilai r positif maka populasi akan meningkat secara eksponensial dan begitu pula sebaliknya.

2. Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik merupakan penyempurnaan dari model pertumbuhan eksponensial. Seperti pada model eksponensial dimana $P(t)$ merupakan suatu fungsi yang dapat diturunkan terhadap waktu, maka jumlah populasi tersebut akan mendekati titik kesetimbangannya (*equilibrium*). Model pertumbuhan logistik ini pertama kali dikenalkan oleh Velhulst pada tahun 1838. Velhurst menyatakan bahwa pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada ukuran atau jumlah populasi, tetapi bergantung pada kapasitas daya tampung (*carrying capacity*) sebagai batasnya (Nurkholipah dkk., 2017). Selain itu beberapa asumsi yang digunakan mempengaruhi dalam menyelesaikan model pertumbuhan logistik. Beberapa asumsi yang perlu diperhatikan adalah sebagai berikut:

a. Pada titik tersebut, jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama sehingga grafik mendekati konstan.

b. Tidak ada waktu tunda, dimana menyatakan bahwa individu lahir dan mati secara kontinu
c. Laju pertumbuhan bernilai positif menyatakan populasi yang selalu bertambah dan laju pertumbuhan negatif menyatakan penurunan jumlah populasi
d. Kapasitas daya tampung (*carrying capacity*) bernilai konstan, artinya luas wilayah pada suatu daerah yang diteliti tidak akan pernah berubah dalam artian tidak ada penambahan maupun pengurangan wilayah.

Model Malthus dimodifikasi oleh Velhulst dengan membuat ukuran populasi sesuai baik untuk populasi sebelumnya berdasarkan syarat $\left(\frac{a-bP}{a}\right)$, untuk a dan b adalah koefisien vital dari populasi atau yang mempengaruhi suatu populasi (Wali dkk., 2011). Apabila persamaan (1.3) dimodifikasi, maka persamaan dengan syarat baru adalah sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(\frac{a - bP}{a}\right) \tag{1.6}$$

Misalkan $a = r$ dan $b = \frac{a}{K}$, dimana K merupakan kapasitas daya tampung maka nilai K adalah $\frac{a}{b}$ yang nantinya akan diperoleh setelah menghasilkan solusi model pertumbuhan logistik. Selanjutnya apabila pemisalan yang telah disebutkan sebelumnya disubstitusikan ke persamaan (1.6) akan diperoleh:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(\frac{a - \frac{a}{K}P}{a}\right)$$

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(\frac{a}{a} - \left(\frac{a}{K}P \times \frac{1}{a}\right)\right)$$

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{1.7}$$

Persamaan (1.7) merupakan bentuk umum dari model pertumbuhan logistik.

Keterangan:

P : Jumlah populasi pada saat t

K : Daya tampung (*carrying capacity*) dari suatu daerah untuk populasi

r : Laju pertumbuhan per kapita populasi

t : Waktu

L. *Mean Absolute Percentage Error (MAPE)*

Untuk mengetahui apakah hasil perhitungan pada suatu model pertumbuhan penduduk yang digunakan tidak jauh berbeda dengan data asli, maka dilakukan perhitungan galat atau kesalahan. Ada banyak pengukuran statistik yang menjelaskan dan mendeskripsikan tentang seberapa cocok suatu model dengan sampel data tertentu (Montgomery dkk., 2011). Salah satu pengukuran yang dikenal tersebut adalah *Mean Absolute Percentage Error (MAPE)*. *MAPE* merupakan evaluasi statistik yang diekspresikan dalam bentuk presentase dan digunakan untuk menilai kecocokan dari suatu model dalam proyeksi penduduk. *MAPE* dinyatakan dalam rumus berikut ini:

$$MAPE = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left|\frac{X_t - \check{X}_t}{X_t}\right| \times 100$$

Keterangan:

X_t = populasi sebenarnya pada waktu t

$\check{X}_t =$ proyeksi populasi pada waktu t

$N =$ jumlah observasi dari masing-masing populasi

Nilai $MAPE$ yang dihasilkan memiliki kriteria sendiri-sendiri untuk dapat dikatakan akurat ataupun tidak terhadap data sebenarnya. Berikut ini indikator atau kriteria dari nilai $MAPE$.

Tabel 2.1. *Indikator nilai* $MAPE$
Sumber: Lewis (Nurkholipah dkk., 2017)

Nilai	**Indikator**
$< 10\%$	Sangat Akurat
$10\% - 20\%$	Sangat Baik
$21\% - 50\%$	Masuk Akal
$> 51\%$	Tidak Akurat