

BAB II LANDASAN TEORI

A. Deskripsi Teori

1. Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan salah satu Teknik untuk merepresentasikan suatu system yang kompleks ke dalam model matematika. Dengan kata lain, pemodelan matematika merupakan suatu system persamaan yang dapat merepresentasikan suatu permasalahan kompleks yang sedang diamati. dengan demikian, model matematika yang diformulasi diharapkan mampu menjelaskan situasi kompleks yang sedang diamati.

Model matematika terdiri dari variable, parameter dan fungsi yang menyatakan relasi antara variable dengan parameter. Dalam pemodelan, perlu dengan tepat memilih hal-hal yang perlu diabaikan dan hal-hal yang perlu diikuti dalam model. Ini sangat bergantung pada permasalahan yang sedang dipelajari atau teliti (Ndii, 2022)

2. Model Pertumbuhan Populasi

Berdasarkan waktu, model model pertumbuhan populasi dapat dibagi menjadi dua yaitu, model pertumbuhan populasi diskrit dan model pertumbuhan populasi kontinu. Model pertumbuhan populasi diskrit menggambarkan perubahan jumlah individu dalam populasi pada waktu-waktu tertentu yang terpisah (diskrit), misalnya setiap tahun atau setiap generasi. Dalam model ini, perubahan jumlah individu hanya terjadi pada waktu yang sudah ditentukan. Sedangkan dalam model pertumbuhan populasi kontinu menggambarkan perubahan jumlah individu dalam populasi secara terus-menerus sepanjang waktu. Populasi yang digunakan adalah populasi dengan ciri-ciri bereproduksi terus menerus dan generasi tumpang tindih (Nurulita, 2016).

Model pertumbuhan populasi kontinu terdiri dari model pertumbuhan eksponensial dan logistik. Model eksponensial tidak memiliki Batasan sehingga pertumbuhan pertumbuhan penduduk akan selalu mengalami peningkatan sampai tak terhingga. Sedangkan pada model pertumbuhan logistik, model ini memasukkan batas untuk populasinya sehingga jumlah populasi tidak akan tumbuh secara tak terhingga (Nurulita, 2016).

Karena pertumbuhan penduduk terjadi secara terus-menerus, maka model matematika yang cocok digunakan untuk memperkirakan jumlah penduduk adalah model populasi kontinu. ada beberapa jenis model yang terdapat pada model yang kontinu yaitu model populasi eksponensial dan model populasi *logistic* (Brauer & Castillo-Chavez, 2012).

3. Model Logistik

Model pertumbuhan logistik merupakan pendekatan yang lebih realistis untuk memprediksi pertumbuhan penduduk jika dibandingkan dengan model eksponensial, karena model *logistic* mempertimbangkan batasan sumber daya yang tersedia. Dalam model ini, laju pertumbuhan populasi atau penduduk tidak hanya dipengaruhi oleh jumlah individu saat ini, tetapi juga kapasitas maksimum lingkungan yang dapat mendukung populasi tersebut. Persamaan diferensial yang digunakan dalam model logistik dituliskan sebagai $\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right)$, dimana P adalah jumlah populasi saat ini, r adalah laju pertumbuhan, dan K adalah kapasitas maksimum populasi. Dengan model ini, populasi akan tumbuh secara eksponensial ketika masih jauh dari kapasitas maksimum, namun laju pertumbuhannya akan melambat seiring mendekati nilai K .

Model pertumbuhan *logistic* adalah pengembangan dari model pertumbuhan eksponensial, di mana jumlah populasi $P(t)$ merupakan fungsi yang bisa berubah seiring waktu, model *logistic* menunjukkan bahwa pertumbuhan populasi akan melambat dan akhirnya mendekati titik keseimbangan. Model ini pertama kali diperkenalkan oleh Verhulst pada tahun 1838. Ia menjelaskan bahwa pertumbuhan populasi tidak hanya dipengaruhi oleh jumlah penduduk saat ini, tetapi juga oleh daya tampung lingkungan (*carrying capacity*), yang menjadi batas maksimal untuk pertumbuhan tersebut (Nurkholipah et al., 2017). Selain itu, ada beberapa asumsi yang digunakan dalam penyusunan model pertumbuhan *logistic* yang bisa mempengaruhi hasilnya. Beberapa asumsi penting yang perlu diperhatikan antara lain:

1. Pertumbuhan populasi dipengaruhi oleh daya tampung lingkungan (*carrying capacity*).
2. Laju pertumbuhan penduduk (r) dianggap tetap selama periode tertentu.
Meskipun pada kenyataannya, faktor seperti migrasi atau bencana bisa mengubah laju pertumbuhan.

3. Jumlah kelahiran dan kematian seimbang saat populasi mendekati daya tampung. Pada titik ini, pertumbuhan populasi melambat karena kelahiran dan kematian saling menyeimbangkan.
4. Kapasitas daya tampung (*carrying capacity*) bernilai konstan, artinya luas wilayah pada suatu daerah yang diteliti tidak akan pernah berubah dalam artian tidak ada penambahan maupun pengurangan luas wilayah.
5. Tidak ada pengaruh faktor eksternal yang besar seperti bencana alam, perubahan kebijakan nasional, atau urbanisasi mendadak yang bisa sangat mempengaruhi jumlah penduduk.

Model Malthus mengalami modifikasi oleh Verhulst dengan menambahkan suatu syarat baru, yaitu $\left(\frac{a-bP}{a}\right)$, agar model lebih sesuai dengan kondisi populasi sebenarnya. Pada persamaan ini, a dan b merupakan parameter yang mempengaruhi dinamika populasi (Wali dkk., 2011). Dengan penerapan syarat tersebut, bentuk persamaan awal (1.1) berubah menjadi:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(\frac{a - bP}{a} \right)$$

4. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat fungsi tidak diketahui beserta turunannya. Persamaan ini biasanya digunakan untuk menggambarkan hubungan antara suatu fungsi dan laju perubahannya (Varberg dkk., 2007).

Penyelesaian persamaan diferensial dibagi menjadi dua, sebagai berikut (Darmawijoyo, 2011).

1. Penyelesaian Persamaan Diferensial Eksplisit

Suatu fungsi $f(x)$ merupakan penyelesaian eksplisit dari persamaan diferensial, jika $f(x)$ memenuhi persamaan untuk setiap x dalam interval $I: a < x < b$, dimana apabila y disubstitusikan dengan $f(x)$, y' dengan $f'(x)$, y'' dengan $f''(x)$ dan seterusnya. Maka persamaan yang didapatkan adalah identitas dalam x .

Contoh:

Ujilah bahwa fungsi yang didefinisikan oleh $y = f(x) = x^2$ adalah penyelesaian dari

$$\frac{1}{4}(y')^2 - xy' + y = 0$$

Penyelesaian:

Diferensialkan terlebih dahulu fungsi $y = f(x) = x^2$, maka $y' = f'(x) = 2x$. Dengan mensubstitusikan $y = f(x)$ dan $y' = f'(x)$ ke bentuk penyelesaian di atas, maka akan diperoleh persamaannya sebagai berikut.

$$\frac{1}{4}(y')^2 - xy' + y = 0$$

$$\frac{1}{4}(2x)^2 - x(2x) + x^2 = 0$$

$$x^2 - 2x^2 + x^2 = 0$$

Karena persamaan pada ruas kiri adalah 0 berarti persamaan tersebut merupakan persamaan identitas untuk solusi penyelesaian $y = f(x) = x^2$.

2. Penyelesaian Persamaan Diferensial Implisit

Suatu relasi $g(x, y) = 0$ dinamakan penyelesaian implisit dari persamaan diferensial $F(x, y, y', c, \dots, y^n) = 0$ pada interval $I: a < x < b$, jika terdapat fungsi $f(x)$ yang didefinisikan pada I sedemikian sehingga $g(x, f(x)) = 0$ untuk setiap x dalam I . Selain itu $f(x)$ memenuhi persamaan $F(x, y, y', c, \dots, y^n) = 0$, jika $F(x, f(x), f'(x), c, \dots, y^n) = 0$ untuk setiap x dalam I .

Contoh:

Ujilah bahwa $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ adalah penyelesaian implisit dari persamaan diferensial $F(x, y, y') = yy' + x = 0$ pada interval $I: -5 < x < 5$.

Penyelesaian:

Lihat bahwa fungsi $g(x, y)$ mendefinisikan $y = f(x)$, sehingga:

$$y^2 = 25 - x^2$$

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

Kemudian substitusikan ke dalam persamaan $F(x, y, y') = yy' + x = 0$ dan akan diperoleh persamaan:

$$F(x, f(x), f'(x)) = \sqrt{25 - x^2} \left(-\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \right) + x = 0$$

$$-x + x = 0$$

Karena hasilnya nol, berarti persamaan itu benar untuk semua x , dan kedua syarat yang diperlukan sudah terpenuhi. Jadi, bias disimpulkan bahwa fungsi $g(x, y)$ adalah solusi implisit dari persamaan diferensial $F(x, y, y')$ tersebut.

Secara umum, persamaan diferensial terbagi menjadi dua jenis, yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). Selain itu berdasarkan sifat kelinierannya, persamaan diferensial juga dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial linier dan persamaan diferensial non-linier (Rina & Husna, 2009). Berikut ini adalah penjelasan pembagian persamaan diferensial secara umum:

1. Persamaan Diferensial Biasa

Suatu persamaan disebut persamaan diferensial bias jika memuat fungsi dengan satu variable dan turunannya. Dalam persamaan ini, hanya ada satu variable bebas dan satu variable terikat. Bentuk umumnya adalah sebagai berikut:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

2. Persamaan Diferensial Parsial

Suatu persamaan disebut persamaan diferensial parsial jika di dalamnya terdapat fungsi yang terdiri dari dua atau lebih variable, serta turunan parsial dari fungsi tersebut. Persamaan diferensial parsial memuat satu variabel terikat dari dua atau lebih variabel bebasnya. Bentuk umum dari persamaan diferensial parsial adalah sebagai berikut (Chapra & Canale, 2010):

$$A \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + D = 0$$

Dimana A, B dan C adalah fungsi x dan y , sedangkan D adalah fungsi $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y}$.

5. Model Pertumbuhan Penduduk

Pertumbuhan penduduk biasanya terjadi secara terus menerus, jadi model matematika yang cocok untuk memperkirakan pertumbuhan penduduk adalah model yang bersifat kontinu. Ada dua jenis model kontinu yang sering digunakan, yaitu model eksponensial dan model *logistic* (Brauer & Castillo-Chavez, 2012).

1. Model Pertumbuhan Eksponensial

Pada tahun 1798, Malthus mengembangkan sebuah model pertumbuhan populasi yang disebut model eksponensial. Dalam model ini, kepadatan penduduk pada waktu tertentu dilambangkan dengan $x(t)$, dan diasumsikan bahwa x sama dengan P , yaitu jumlah populasi. Fungsi $P(t)$ digunakan untuk menunjukkan bagaimana jumlah populasi bertambah atau berkurang seiring waktu. Jika $P(t)$ merupakan fungsi yang kontinu dan dapat diturunkan, serta r adalah laju pertumbuhan populasi, maka model eksponensial dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut (Brauer & Castillo-Chavez, 2012):

$$\frac{dP}{dt} = rP(t) \quad (1.1)$$

dimana merupakan persamaan diferensial biasa orde 1, sehingga solusi umumnya dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

$$\int \frac{dP}{dt} = \int r dt$$

$$\ln P(t) = rt + c$$

$$e^{\ln P(t)} = e^{rt+c}$$

$$P(t) = e^{rt+c} \quad (1.4)$$

Untuk menggambarkan dinamika populasi suatu wilayah, dapat dimulai dengan menetapkan kondisi awal pada waktu $t = 0$, sehingga jumlah populasi awal dinyatakan sebagai $P(0) = P_0$. Dengan demikian, nilai konstanta c dapat ditentukan sebagai $c = \ln P_0$ dan apabila disubstitusikan ke persamaan sebelumnya akan menghasilkan:

$$P(t) = e^{rt+\ln P_0} = e^{rt} e^{\ln P_0} = P_0 e^{rt} \quad (1.5)$$

Persamaan di atas merupakan solusi khusus dari model pertumbuhan eksponensial, dimana apabila r positif maka populasi akan meningkat secara eksponensial dan apabila nilai r bernilai negatif maka populasi akan mengalami peluruhan.

2. Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan *logistic* adalah pengembangan dari model pertumbuhan eksponensial, di mana jumlah populasi $P(t)$ merupakan fungsi yang bias berubah seiring waktu, model *logistic* menunjukkan bahwa pertumbuhan populasi akan melambat dan

akhirnya mendekati titik keseimbangan. Model ini pertama kali diperkenalkan oleh Velhust pada tahun 1838. Ia menjelaskan bahwa pertumbuhan populasi tidak hanya dipengaruhi oleh jumlah penduduk saat ini, tetapi juga oleh daya tampung lingkungan (*carrying capacity*), yang menjadi batas maksimal untuk pertumbuhan tersebut (Nurkholipah et al., 2017). Selain itu, ada beberapa asumsi yang digunakan dalam penyusunan model pertumbuhan *logistic* yang bisa mempengaruhi hasilnya. Beberapa asumsi penting yang perlu diperhatikan antara lain:

- a. Pada titik tertentu (tersebut), jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama sehingga grafik mendekati konstan.
- b. Tidak ada waktu tunda, di mana menyatakan bahwa individu lahir dan mati secara kontinu.
- c. Laju pertumbuhan bernilai positif menyatakan populasi yang selalu bertambah dan laju pertumbuhan yang bernilai negatif menyatakan penurunan/peluruhan jumlah populasi.
- d. Kapasitas daya tampung (*carrying capacity*) bernilai konstan, artinya luas wilayah pada suatu daerah yang diteliti tidak akan pernah berubah dalam artian tidak ada penambahan maupun pengurangan luas wilayah.

Model Malthus dimodifikasi oleh Velhust dengan membuat ukuran populasi sesuai baik untuk populasi sebelumnya berdasarkan syarat $\left(\frac{a-bP}{a}\right)$, untuk a dan b adalah koefisien vital dari populasi atau yang mempengaruhi suatu populasi (Wali dkk., 2011). Apabila persamaan (1.1) dimodifikasi, maka persamaan dengan syarat baru adalah sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(\frac{a-bP}{a} \right) \quad (1.6)$$

Misalkan $a = r$ dan $= \frac{a}{K}$, dimana K merupakan kapasitas daya tampung maka nilai K adalah $\frac{a}{b}$ yang nantinya akan diperoleh setelah menghasilkan solusi model pertumbuhan *logistic*. Selanjutnya apabila pemisalan yang telah disebutkan sebelumnya disubstitusikan ke persamaan (1.6) akan diperoleh:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(\frac{a - \frac{a}{K}P}{a} \right)$$

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(\frac{a}{a} - \left(\frac{a}{K}P \times \frac{1}{a} \right) \right)$$

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) \quad (1.7)$$

Persamaan (1.7) merupakan bentuk umum dari model pertumbuhan *logistic*.

Keterangan:

P : Jumlah populasi saat t

K : Daya tampung (*carrying capacity*) dari suatu daerah untuk populasi

r : Laju pertumbuhan per kapita populasi

t : waktu

6. Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

Untuk mengetahui apakah hasil prediksi dari suatu model pertumbuhan penduduk mendekati data aslinya, dilakukan pengukuran kesalahan atau galat. Ada beberapa cara untuk mengukur seberapa tepat model tersebut dengan data nyata (Montgomery et al., 2015). (Montgomery et al., 2015). Salah satu cara yang umum digunakan adalah MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*), yaitu metode statistik yang menunjukkan tingkat kesalahan dalam bentuk persentase. MAPE digunakan untuk melihat seberapa akurat suatu model dalam memprediksi jumlah penduduk. Rumus MAPE adalah sebagai berikut:

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[\frac{X_t - \bar{X}_t}{X_t} \right] \times 100$$

Keterangan:

X_t : populasi sebenarnya pada waktu t

$\bar{X}_t$: proyeksi populasi pada waktu t

N : jumlah observasi dari masing- masing populasi

Nilai MAPE memiliki kriteria tersendiri untuk menentukan apakah hasil prediksi dianggap akurat atau tidak dibandingkan dengan data aslinya. Berikut ini adalah kriteria atau indikator nilai MAPE.

Tabel 2.1. Kriteria nilai MAPE

Sumber : Lewis (Nurkholipah et al., 2017)

Nilai MAPE	Kriteria
< 10%	Sangat Akurat
10% – 20%	Sangat Baik
21% – 50%	Masuk Akal
> 51%	Tidak Akurat

7. Gambaran Umum Wilayah Kabupaten Ponorogo

1. Sejarah singkat

Menurut sejarah, setelah Raden Bathoro Katong sampai di wilayah wengker, dia berupaya mendirikan sebuah pemukiman. Melalui berbagai hambatan, dan tantangan, akhirnya pada tahun 1482 M Raden Batoro Katong mulai mengkonsolidasikan wilayahnya. Pendekatan kekeluargaan dengan Ki Ageng Kutu dan seluruh pendukungnya ketika itu mulai membuahkan hasil. Pada akhirnya Raden Bathoro Katong berhasil membentuk sebuah wilayah bernama Kadipaten Ponorogo dan ia menjadi adipati pertama pada abad XV.

Kabupaten Ponorogo berdiri pada 11 agustus 1496 M. hingga saat ini tanggal tersebut diperingati sebagai tanggal ulang tahun Kabupaten Ponorogo. Asal usul dari nama Ponorogo adalah hasil musyawarah yang dilakukan oleh Raden Bathoro Katong, Kyai Mirah, Selo Aji dan Joyodipo pada hari jum'at saat bulan purnama. Hasil musyawarah sebenarnya ditetapkan dengan nama Pramana Raga yang lama kelamaan menjadi Ponorogo. Pramana Raga terdiri dari dua kata, yaitu Pramana bermakna daya kekuatan, rahasia hidup, serta Raga yang bermakna badan, jasmani. Jika digabungkan akan bermakna manusia yang memiliki batin yang mantap dan mapan akan penempatan emosi dimanapun dan kapanpun berada (Admin liputan6.com, 2022).

2. Luas dan Batas wilayah administrasi

Kabupaten Ponorogo memiliki luas wilayah $1.371,78 \text{ km}^2$. Dimana secara administratif terbagi menjadi 21 kecamatan, 26 kelurahan, dan 279 desa. Di Sebelah Utara, Kabupaten Ponorogo berbatasan langsung dengan Kabupaten Madiun, Kabupaten

Magetan dan Kabupaten Nganjuk, di sebelah timur berbatasan dengan Kabupaten Tulungagung dan Kabupaten Trenggalek. Sedangkan di sebelah selatan berbatasan dengan Kabupaten Pacitan dan Kabupaten Trenggalek, serta di sebelah barat berbatasan dengan Kabupaten Pacitan dan Kabupaten Wonogiri Provinsi Jawa Tengah (Admin Bag.umum Sekretariat Daerah Ponorogo, 2019).

3. Letak Geografis

Kabupaten Ponorogo berdasarkan kondisi Geografisnya, terletak pada 111°7' hingga 111° 52' Bujur Timur dan 7° 49' hingga 8° 20' Lintang Selatan (Admin Universitas Muhammadiyah Ponorogo, 2024). Kabupaten Ponorogo berdasarkan topografinya terletak pada ketinggian antara 92 sampai 2.563 meter di atas permukaan laut, sehingga Kabupaten Ponorogo memiliki 2 sub-area, yaitu area dataran tinggi yang meliputi kecamatan Ngrayun, Sooko, Pulung, dan Ngebel sisanya merupakan area dataran rendah. Selain itu Kabupaten Ponorogo dilewati oleh 14 sungai dengan panjang antara 4-58 km yang dimanfaatkan sebagai sumber irigasi bagi lahan pertanian. Sebagian besar luas yang ada di wilayah Kabupaten Ponorogo terdiri dari area kehutanan dan lahan sawah sedangkan sisanya digunakan untuk tegal pekarangan (Admin Bag.umum Sekretariat Daerah Ponorogo, 2019). Wilayah Kabupaten Ponorogo dapat dilihat berdasarkan peta dibawah ini.



Gambar 2.1 peta wilayah kabupaten ponorogo

(sumber: <https://www.pn-ponorogo.go.id/tentang-kami/peta-yurisdiksi>)